

## Resolución simultánea de los problemas de scheduling de la producción y de la distribución en plantas batch multiproducto multietapa

Aldana Tibaldo<sup>1</sup>, Jorge Marcelo Montagna<sup>1</sup>, Yanina Fumero<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Desarrollo y Diseño, CONICET-UTN, Avellaneda 3657, S3002GJC Santa Fe, Argentina  
{aldanatibaldo, mmontagna, yfumero}@santafe-conicet.gov.ar

**Resumen.** En la mayoría de las industrias, la programación de la producción y la distribución se desacopla mediante el inventario de productos finales que permiten una planificación separada de estas tareas. Si bien este enfoque secuencial simplifica el problema, existen diversos ambientes donde esta metodología genera ineficiencias y en consecuencia la toma de decisiones en conjunto es necesaria. En este trabajo se presenta una formulación matemática mixta-entera lineal (MILP) para gestionar simultáneamente las decisiones de batching, producción y distribución en una planta batch multiproducto multietapa, a fin de satisfacer los requerimientos de demanda de los clientes para las ventanas de tiempo en las que éstas se solicitan y minimizando los costos de operación. El modelo desarrollado permite determinar el número y tamaño de los lotes que se deben producir para cada producto, la asignación, secuenciamiento y tiempos de inicio y fin de los diferentes lotes en las unidades de todas las etapas del sistema productivo, como así también el número y tipo de vehículos a utilizar, la asignación parcial/total de los lotes a los vehículos, y, para cada vehículo seleccionado, su tiempo de partida, la secuencia de clientes visitados (ruteo) y los tiempos de entrega asociados a éstos.

**Palabras claves:** programación de la producción, problema de ruteo, ventanas de tiempo, MILP.

### 1 Introducción

En los últimos años, la coordinación de las actividades de producción y distribución a nivel operativo se ha convertido en un problema muy estudiado. Tradicionalmente, estas decisiones han sido abordadas en forma desacoplada y secuencial. Sin embargo, resolver estos problemas de forma independiente ignora los requisitos y limitaciones del otro y no lleva a la solución óptima, pudiendo incluso no satisfacer las expectativas de los clientes. De hecho, se ha demostrado que a nivel operativo la integración de las decisiones de programación de la producción y de la distribución puede presentar una mejora entre el 5% y

el 20% en comparación con un enfoque no coordinado [1-4]. No obstante, la resolución simultánea de estos problemas se presenta como un gran desafío teniendo en cuenta que ambos son de complejidad combinatoria, y que el desarrollo de representaciones que integren las decisiones de producción y distribución puede conducir a modelos intratables desde el punto de vista computacional, dado el gran número de variables de decisión involucradas.

Esta integración resulta sumamente valiosa en diversas aplicaciones industriales. Las firmas que más se benefician con la coordinación de estas actividades, o incluso en las cuales resulta necesaria, son aquellas en las que los productos finales deben entregarse a los clientes poco después de su producción. Los productos perecederos o con vida útil limitada son los primeros de la lista; algunos ejemplos son el hormigón elaborado [5], la industria del catering [6], materiales adhesivos [7], medicamentos para tratamientos como el cáncer [8], medicina nuclear [9]. Por otro lado, a causa del surgimiento de las tecnologías de la Industria 4.0 y la alta variabilidad de los mercados, hay compañías que para seguir siendo competitivas debieron cambiar sus sistemas de fabricación contra stock (MTS, por sus siglas en inglés “make-to-stock”) a fabricación contra pedido (MTO, por sus siglas en inglés “make-to-order”). Este sistema de producción se caracteriza por producir productos personalizados, adaptados a la medida del cliente, lo cual conduce a que el inventario de la planta sea prácticamente nulo y que los pedidos deban enviarse una vez producidos. Por esta razón, en este tipo de ambientes también resulta imprescindible la integración de las decisiones de producción y distribución. Asimismo, en plantas manufactureras que emplean la política de producción justo a tiempo (JIT, por sus siglas en inglés “just-in-time”), la cual tiene como objetivo principal eliminar los desperdicios (sobreproducción, almacenaje, operaciones innecesarias, inventarios, tiempos de espera), resulta indispensable la toma de decisiones en conjunto.

En la literatura del área, las principales contribuciones que revisan los estudios existentes sobre la integración de las actividades de producción y distribución a nivel operativo plantean una clasificación del problema integrado de acuerdo al ambiente productivo, al tipo de política de distribución y entrega, a la función objetivo y a la metodología de solución utilizada [3,10-11]. La gran mayoría de los trabajos citados abordan este problema en ambientes productivos relativamente simples, donde los pedidos u órdenes deben procesarse en una única etapa de producción la cual cuenta con una única unidad o varias unidades en paralelo. Por el contrario, son muy escasos los trabajos que consideran entornos productivos multietapa con múltiples unidades operando en paralelo en cada etapa. Ramezani y col. [12], Rahman y col. [13], Yağmur y Kesen [4] y Chevrotton y col. [14] integran los problemas de producción y distribución en sistemas “flowshop”, es decir, para el caso de una estructura multietapa donde cada etapa cuenta con una única unidad para el procesamiento de las órdenes de los clientes. Dado que cada orden debe seguir la misma secuencia de operaciones a través de todas las etapas, y cada unidad sólo puede procesar una orden a la vez, la secuencia de procesamiento es idéntica en cada etapa de la planta. En un trabajo más reciente, Hou y col. [15] proponen un algoritmo heurístico basado en optimización de enjambre de partículas para resolver el problema integrado para el caso de múltiples plantas de producción flowshop, donde cada una de ellas dispone de una flota

de vehículos homogénea para la entrega de los pedidos. Por otro lado, sobre un entorno de producción “jobshop” flexible, donde las órdenes pueden seguir secuencias de procesamiento diferentes y no necesariamente empleando todas las etapas del proceso productivo, Mohammadi y col. [16] presentan una formulación no lineal mixta entera bi-objetivo para el problema integrado, donde se minimizan costos de producción y distribución y por otro lado la suma ponderada de la tempranez y la tardanza en la entrega de los pedidos a los clientes. Para resolver instancias pequeñas del problema recurren a la técnica  $\epsilon$ -constraint, mientras que, para problemas de gran escala, al igual que los trabajos previamente mencionados, plantean el uso de diferentes metodologías heurísticas.

En este trabajo se propone un modelo MILP que permite gestionar simultáneamente las actividades de producción y distribución en un ambiente flowshop más flexible, caracterizado por una instalación batch multiproducto multietapa, donde cada etapa cuenta con múltiples unidades no idénticas operando en paralelo. A diferencia de los estudios mencionados anteriormente, en este trabajo se considera que los pedidos que realizan los clientes pueden superar la capacidad máxima de las unidades o no reunir la cantidad mínima requerida para su procesamiento. De esta manera, las demandas totales de cada producto considerando los diferentes clientes son consolidadas en una única demanda para ese producto, lo que permite un mejor aprovechamiento de la capacidad productiva y poder cumplir con los requerimientos de los clientes. Bajo este escenario, es necesario considerar simultáneamente decisiones de dimensionamiento y número de lotes o “batches” (comúnmente llamado problema de “batching”) en los que se debe dividir la demanda total de cada producto junto a las decisiones de producción y ruteo de los vehículos. En cuanto a las operaciones de transporte, la planta cuenta con una flota heterogénea de vehículos de diferentes capacidades y costos asociados. El objetivo del problema es satisfacer los requerimientos de demanda de los clientes a un costo operativo mínimo. Finalmente, las capacidades del enfoque propuesto son ilustradas a través de un caso de estudio.

## 2 Descripción del problema

Al principio del horizonte de planificación, la firma establece ventanas de tiempo o caducidad  $d \in D$  en las que cada cliente  $i \in IC$  puede solicitar la entrega de sus pedidos, los cuales pueden estar compuestos por un mix de productos  $p \in P$ . De esta manera se genera un acuerdo mutuo entre la planta y los clientes, en el cual la empresa se compromete a que los pedidos asociados a cada ventana  $d$  sean entregados en su intervalo de tiempo correspondiente  $[a_d, c_d]$ . Para la producción, se considera un sistema flowshop flexible, donde los productos deben seguir la misma secuencia de operación, empleando todas las etapas de la planta. Cada etapa  $j \in J$  cuenta con múltiples unidades  $m \in MJ_j$  no idénticas que operan en paralelo, las cuales poseen diferentes capacidades, tiempos fijos y variables y costos de procesamiento según el tipo de producto que se procese. Para lograr un mejor aprovechamiento de las unidades productivas, las demandas de cada producto considerando los diferentes clientes se consolidan en una única demanda para ese producto. Para su

producción, cada demanda de producto  $p$  se puede particionar en batches  $b \in B_p$ , donde cada batch puede utilizarse para satisfacer diferentes pedidos que demanden ese producto. El procesamiento de cada lote requerido se realiza en una única unidad en cada etapa de producción. Se consideran tiempos de “changeovers” entre pares de lotes sucesivos de diferentes productos que se procesan en cada unidad. El número y tamaño de los lotes necesarios de cada producto para cumplir con todos los pedidos no se conoce a priori, con lo cual se deben proponer cotas adecuadas a fin de facilitar la solución del problema y asegurar la optimalidad.

Para la distribución de los pedidos, la planta cuenta con una flota heterogénea de vehículos  $v \in V$ , los cuales están agrupados en diferentes tipos de vehículos  $vt \in VT$ , según sus capacidades. La planta cuenta con capacidad de almacenamiento suficiente para mantener temporalmente los lotes que al finalizar su procesamiento deben aguardar para ser despachados en un vehículo. Se considera que cada vehículo solo podrá realizar un recorrido, partiendo y regresando a la planta manufacturera. La distancia entre los diferentes clientes y la planta, como así también la velocidad media de cada tipo de vehículo son datos del problema, con lo cual los tiempos de viaje entre diferentes nodos quedan determinados por estos parámetros. En cada vehículo se pueden cargar pedidos de diferentes clientes, pero el pedido de un cliente para una determinada ventana de tiempo debe ser entregado de manera completa por un único vehículo, no permitiendo así entregas parciales. De esta manera, en cada vehículo, se consolidan los lotes o partes de lotes necesarios para completar los pedidos que se entregan con dicho vehículo. Cada pedido debe ser entregado dentro de los límites de la ventana de tiempo asociada a éste, y se considera que los vehículos no pueden tener espera inactiva, la cual afecta al bienestar del conductor y aumenta ciertos costos (por ejemplo, el salario del conductor, el costo operativo de los vehículos, etc.). Para cada vehículo que se seleccione, la ruta a seguir es una variable del modelo y estará compuesta por los pares cliente-ventana de tiempo visitados con el vehículo.

Bajo las consideraciones previas, el problema consiste en determinar la programación de la producción: número y tamaño de los lotes de cada producto, su asignación y secuenciamiento en todas las unidades de la planta, sus tiempos iniciales y finales de procesamiento, como así también las decisiones relativas a la distribución de los productos finales: número y tipo de vehículos a utilizar, asignación de los lotes a los vehículos, ruteo de cada vehículo, tiempo de partida de los vehículos y tiempos de entrega a los clientes.

### 3 Formulación matemática

#### 3.1 Restricciones de producción

Teniendo en cuenta que la tarea de batching (número y tamaño de lotes de cada producto) forma parte de las decisiones que se deben optimizar, el número de lotes propuestos para cada producto es un factor crítico para la resolución eficiente del problema.

Considerando las demandas totales de producto  $p$  sobre todas las ventanas de tiempo, y la capacidad mínima exigida y máxima admisible para el procesamiento del producto  $p$  en la unidad  $m$ ,  $Minbsize_{mp}$  y  $Maxbsize_{mp}$ , respectivamente, es posible calcular el número mínimo y máximo de lotes de producto  $p$  que se pueden procesar en la unidad  $m$  para satisfacer los pedidos de todos los clientes,  $NB_{mp}^{LOW}$  y  $NB_{mp}^{UP}$ , respectivamente, mediante las siguientes expresiones:

$$NB_{mp}^{LOW} = \left\lceil \frac{\sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{ipd}}{Maxbsize_{mp}} \right\rceil \quad \forall m \in M, p \in P \quad (1)$$

$$NB_{mp}^{UP} = \left\lfloor \frac{\sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{ipd}}{Minbsize_{mp}} \right\rfloor \quad \forall m \in M, p \in P \quad (2)$$

donde  $Maxbsize_{mp} = \min\{capmax_{mp}, \min_{j \in J} \{\max_{m \in MJ_j} \{capmax_{mp}\}\}\}$ , mientras que el parámetro  $Minbsize_{mp} = \max\{capmin_{mp}, \max_{j \in J} \{\min_{m \in MJ_j} \{capmin_{mp}\}\}\}$ .

Dado que el ambiente de producción es multietapa, el número máximo de lotes que se pueden proponer para el producto  $p$  está dado por:  $nbmax_p = \min_{j \in J} \{\max_{m \in MJ_j} \{NB_{mp}^{UP}\}\}$ . En consecuencia, este parámetro se utiliza para definir el conjunto de lotes propuestos para el producto  $p$ ,  $BP_p = \{b_1, b_2, \dots, b_{nbmax_p}\}$ . Del mismo modo, el parámetro  $nbmin_p = \max_{j \in J} \{\min_{m \in MJ_j} \{NB_{mp}^{LOW}\}\}$  determina el número mínimo de lotes de producto  $p$  que se deben procesar para cumplir con las demandas de todos los clientes.

Teniendo en cuenta la posibilidad de que ocurra el caso extremo en el que todos los lotes de producto se procesen en una misma unidad en cada etapa de producción, el número de batches totales se debe proponer como  $\sum_{p \in P} nbmax_p$ . Sin embargo, de acuerdo a las ventanas de tiempo propuestas para la entrega de los pedidos y los tiempos de procesamiento de los productos, este parámetro puede resultar en una sobrestimación. Considerando la información relativa a estos datos del problema, un valor más ajustado para este parámetro puede ser propuesto. Para ello, se resuelve el siguiente problema de optimización lineal entero (PL):

$$\text{Maximizar } LOTESFACTIBLES = \sum_{m \in M} \sum_{p \in P} SP_{mp} \quad (3)$$

$$S.a. \sum_{p \in P} (ftp_{mp} + vtp_{mp} Maxbsize_{mp}) SP_{mp} \leq \max_d \{c_d\} - MTD \quad \forall m \in MJ_j, \forall j \in J \quad (4)$$

$$SP_{mp} \leq NB_{mp}^{UP} \quad \forall m \in MJ_j, \forall j \in J, \forall p \in P \quad (5)$$

$$\sum_{m \in MJ_j} SP_{mp} \geq nbmin_p \quad \forall p \in P, \forall j \in J \quad (6)$$

El objetivo es maximizar el número total de lotes que se pueden procesar sobre toda la planta, donde la variable entera  $SP_{mp}$  representa el número de lotes factibles de producto  $p$  que se pueden procesar en la unidad  $m$ . La ec. (4), que involucra los cálculos de los tiempos de procesamiento de todos los lotes de producto en función del tamaño de cada lote, garantiza que el tiempo de procesamiento final en cada unidad no supere al máximo de los límites superiores sobre todas las ventanas de tiempo menos el tiempo de viaje más corto entre la planta, denotada por  $i_0$ , y los clientes, denotado por  $MTD = \min_{i \in IC} \{tv_{i_0i}\}$ . La ec. (5) acota superiormente la variable  $SP_{mp}$  mientras que, la ec. (6) garantiza que la cantidad de lotes que se deben procesar del producto  $p$ , en cada etapa, sea mayor al parámetro  $nbmin_p$ .

La solución óptima de este problema permite proponer un valor más ajustado para el parámetro  $L_m$ , que representa el número máximo de lotes que se pueden procesar en la unidad  $m$ , mediante la expresión:

$$L_m = \sum_{p \in P} SP_{mp} \quad \forall m \in M \quad (7)$$

Para las decisiones de batching se definen la variable continua  $BS_{bp}$ , la cual representa el tamaño del lote  $b$  de producto  $p$ , expresado en número de unidades de producto, y la variable binaria  $x_{bp}$ , que indica si el lote  $b$  de producto  $p$  es procesado. Dado que se debe cumplir con la entrega del total de unidades demandadas por los clientes, se debe imponer que  $x_{bp} = 1$  para la cantidad mínima de lotes que se requieren de cada producto. Para evitar soluciones alternativas, la ec. (8) asegura que los lotes de un mismo producto sean seleccionados en orden numérico ascendente.

$$x_{bp} \geq x_{b+1p} \quad \forall b, b+1 \in B_p, \forall p \in P \quad (8)$$

Mediante la variable de asignación  $X_{bpm}$ , la ec. (9) garantiza que cada lote  $b$  de producto  $p$  seleccionado, se procese sobre una única unidad en cada etapa de producción. A través de la ec. (10) se buscan eliminar soluciones simétricas, sin afectar la optimalidad de la solución. Para ello, se establece que los lotes de un mismo producto que sean seleccionados para su procesamiento se asignen en orden numérico ascendente respecto de las unidades disponibles en la primera etapa de producción. Por otro lado, la cantidad de lotes que se pueden procesar en cada unidad está limitada por el parámetro  $L_m$  (ec. (11)).

$$x_{bp} = \sum_{m \in MJ_j} X_{bpm} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall j \in J \quad (9)$$

$$X_{bpm} \leq \sum_{m' \leq m} X_{b-1pm'} \quad \forall b-1, b \in B_p, \forall p \in P, \forall m, m' \in MJ_j \quad (10)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} X_{bpm} \leq L_m \quad \forall m \in M \quad (11)$$

La ec. (12) garantiza que se produzca exactamente el total demandado de cada producto  $p$  y mediante las ecs. (13) y (14) se establecen las cotas máxima y mínima para el tamaño de cada lote.

$$\sum_{b \in B_p} BS_{bp} = \sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} dem_{ipd} \quad \forall p \in P \quad (12)$$

$$BS_{bp} \leq \sum_{m \in MJ_j} Maxsize_{mp} X_{bpm} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall j \in J \quad (13)$$

$$BS_{bp} \geq \sum_{m \in MJ_j} Minsize_{mp} X_{bpm} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall j \in J \quad (14)$$

Para el secuenciamiento de los batches en cada unidad de una etapa se utiliza la noción de precedencia general global. Este tipo de representación se basa en el concepto de que una tarea, operación o trabajo precede a otro siempre que sea ejecutado más temprano en el mismo equipo o unidad de procesamiento. En efecto, la variable  $XX_{bb'p'j}$  solo toma valor 1 si el lote  $b$  de producto  $p$  es procesado más temprano que el lote  $b'$  de producto  $p'$ , siempre que ambos estén asignados a la misma unidad de la etapa  $j$  (ecs. (15)-(17)).

$$XX_{bb'p'j} + XX_{b'p'b'pj} \geq X_{bpm} + X_{b'p'm} - 1 \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall m \in MJ_j, \forall j \in J \quad (15)$$

$$XX_{bb'p'j} \leq \sum_{m \in MJ_j} X_{bpm} \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall j \in J \quad (16)$$

$$XX_{bb'p'j} \leq \sum_{m \in MJ_j} X_{b'p'm} \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall j \in J \quad (17)$$

La ec. (18) obliga a la variable  $XX_{bb'p'j}$  a tomar el valor 0 si los lotes  $b$  y  $b'$  no se procesan en la misma unidad en la etapa  $j$ , mientras que la ec. (19) establece que si  $XX_{bb'p'j} = 1$  y ambos lotes son asignados a la misma unidad en la etapa siguiente  $j+1$ , entonces dichos lotes mantienen la relación de precedencia en la etapa  $j+1$  ( $XX_{bb'p'j+1} = 1$ ). Finalmente, la ec. (20) garantiza que, si dos lotes consecutivos  $b, b+1$  del mismo producto son asignados a la misma unidad en la primera etapa de la planta, el lote  $b$  se procesa antes que el lote  $b+1$  en dicha etapa.

$$XX_{bb'p'j} \leq 2 - X_{bpm} - X_{b'p'm} \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall m \neq m' \in MJ_j, \forall j \in J \quad (18)$$

$$XX_{bb'p'j+1} \geq X_{bpm'} + X_{b'p'm'} + XX_{bb'p'j} - 2 \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall m' \in MJ_{j+1}, \forall j, j+1 \in J \quad (19)$$

$$XX_{bb+1pj} \geq X_{bpm} + X_{b+1pm} - 1 \quad \forall b, b+1 \in B_p, \forall p \in P, \forall m \in MJ_j, j=j+1 \quad (20)$$

El tiempo de procesamiento de un lote de producto se calcula considerando un tiempo de procesamiento fijo dependiente de la unidad donde se procese y un tiempo de procesamiento variable dependiente del tamaño del batch. La ec. (21) establece que el tiempo final de procesamiento del lote  $b$  de producto  $p$  en la etapa  $j$ ,  $FT_{bpj}$ , debe ser igual al tiempo inicial de procesamiento de dicho lote, denotado por  $ST_{bpj}$ , más el tiempo que requiera su producción en la unidad donde se procese. Para evitar la no linealidad del término  $X_{bpm}BS_{bp}$ , se introduce la variable continua  $XBS_{bpm}$  la cual representa el producto entre las mencionadas variables. Las restricciones asociadas a esta variable no se presentan por razones de espacio, pero el lector interesado puede solicitarlas a los autores.

$$FT_{bpj} = ST_{bpj} + \sum_{m \in MJ_j} (fpt_{mp} X_{bpm} + fvt_{mp} X_{bpm} BS_{bp}) \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall j \in J \quad (21)$$

Dado que se adopta la política de transferencia de espera cero entre etapas (ZW, "Zero-Wait"), cada lote, luego de terminar su procesamiento en una determinada etapa, es trans-

ferido inmediatamente a la siguiente etapa (ec. (22)). La ec. (23) asegura que se respeten los tiempos de changeovers entre batches consecutivos de diferentes productos que sean procesados en una misma unidad.

$$FT_{bj} = ST_{bj+1} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall j, j+1 \in J \quad (22)$$

$$FT_{bj} + ch_{pp'j} \leq ST_{b'p'j} + M_1(1 - XX_{bpb'p'j}) \quad \forall b \in B_p, b' \in B_{p'}, \forall p, p' \in P, \forall m \in MJ_j, \quad (23)$$

$$\forall j \in J, (j \neq j_j \vee p \neq p' \vee b < b')$$

### 3.2 Restricciones de distribución

Se define la variable binaria  $W_v$ , la cual toma el valor 1 si el vehículo  $v$  es utilizado, y 0 en caso contrario. El conjunto  $V$  se particiona en los conjuntos  $VVT_{vt}$ , con  $vt \in VT$ , los cuales son disjuntos dos a dos, y contienen a los vehículos disponibles de cada tipo. Dado que cada lote de producto puede ser utilizado parcialmente para satisfacer pedidos que son distribuidos en diferentes vehículos, se definen la variable binaria  $R_{bpv}$ , que indica si el lote  $b$  de producto  $p$  es asignado al vehículo  $v$ , y la variable continua no negativa  $QT_{bpv}$ , que representa la cantidad de unidades de ese lote que son cargadas en el vehículo. Las ecs. (26) y (27) garantizan que la cantidad total de unidades de todos los productos asignadas a cada vehículo no exceda su capacidad máxima, representada por  $cap_{vt}$ , y no se encuentre por debajo de su capacidad mínima exigible, calculada como el producto entre la capacidad máxima y el porcentaje de ocupación  $prc_{vt}$ . Como la capacidad de cada vehículo está dada en unidades de peso, en ambas ecuaciones se introduce el factor de tamaño  $\alpha_p$ , el cual representa el peso por unidad de producto final. La ec. (28) garantiza que a todos los clientes que son visitados por el vehículo  $v$  se les entregue la cantidad total de unidades que componen su pedido.

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} \alpha_p QT_{bpv} \leq cap_{vt} W_v \quad \forall v \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (26)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} \alpha_p QT_{bpv} \geq prc_{vt} cap_{vt} W_v \quad \forall v \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (27)$$

$$\sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} \alpha_p QT_{bpv} = \sum_{i \in IC} \sum_{d \in D} \sum_{p \in P} dem_{ipd} Z_{idv} \quad \forall v \in V \quad (28)$$

La ec. (29) asegura que el total de unidades que componen el lote  $b$  de producto  $p$  sean cargadas en los vehículos utilizados. La ec. (30) hace nula la variable  $QT_{bpv}$  si  $R_{bpv} = 0$ ; caso contrario, la ec. (31) impone que al menos una unidad de producto  $p$  del lote  $b$  sea asignada al vehículo  $v$ .

$$\sum_{v \in V} QT_{bpv} = BS_{bp} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (29)$$

$$QT_{bpv} \leq maxsize_p R_{bpv} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (30)$$

$$QT_{bpv} \geq R_{bpv} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (31)$$

Finalmente, la ec. (32) garantiza que ninguna unidad de producto del lote  $b$  se asigna al vehículo  $v$  si dicho lote no es procesado en la planta, caso contrario, éste debe asignarse al menos a un vehículo (ec. (33)).

$$R_{bpv} \leq x_{bp} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (32)$$

$$\sum_{v \in V} R_{bpv} \geq x_{bp} \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P \quad (33)$$

Dado que no se admiten entregas parciales de los pedidos, para cada cliente que solicita un pedido en la ventana de tiempo  $d$ , esto es  $i \in IC_d$ , lo solicitado debe enviarse en un único vehículo. Al introducir la variable binaria  $Z_{idv}$ , la cual es 1 si el pedido del cliente  $i$  en la ventana de tiempo  $d$  es entregado con el vehículo  $v$ , y 0 en caso contrario, lo anterior se puede asegurar mediante la siguiente ecuación:

$$\sum_{v \in V} Z_{idv} = 1 \quad \forall i \in IC_d, \forall d \in D \quad (34)$$

Debido a que los vehículos no tienen espera inactiva, las ecs. (35) y (36) establecen que no es posible entregar con un mismo vehículo pedidos de un mismo cliente asociados a ventanas de tiempo no consecutivas, ni tampoco para el caso en que correspondan a ventanas de tiempo sucesivas  $d, d+1$ , cuyo extremo superior de la ventana  $d$  no coincide con el extremo inferior de  $d+1$ , esto es  $c_d \neq a_{d+1}$ .

$$Z_{idv} + Z_{id'v} \leq 1 \quad \forall i \in IC_d \cup IC_{d'}, \forall d, d' \in D / d+1 < d', \forall v \in V \quad (35)$$

$$Z_{idv} + Z_{id+1v} \leq 1 \quad \forall i \in IC_d \cup IC_{d+1}, \forall d, d+1 \in D / c_d \neq a_{d+1}, \forall v \in V \quad (36)$$

Para las decisiones de ruteo, que establecen el secuenciamiento de los clientes visitados por cada vehículo, se definen las siguientes variables binarias:  $ZP_{iv}$  es igual a 1 si el cliente  $i$  es el primero en ser visitado en el recorrido del vehículo  $v$ ,  $Y_{ii'v}$  es igual a 1 si al cliente  $i$  se le entrega inmediatamente antes del cliente  $i'$  con el camión  $v$ , y finalmente  $ZU_{iv}$  cuyo valor es 1 si el cliente  $i$  es el último en la ruta del vehículo  $v$ , y cero en caso contrario.

Cada vehículo que se utiliza debe tener asignado un cliente que sea el primero en visitar y uno que sea el último (ecs. (37) y (38)). Para ello, si el cliente  $i$  es el primero, último o tiene relación de precedencia (antecesor-sucesor) con cualquier otro cliente en la ruta del vehículo  $v$ , se debe garantizar que a dicho cliente se le debe entregar, con el vehículo  $v$ , lo solicitado en al menos una ventana de caducidad (ecs. (39)-(42)).

$$\sum_{i \in IC} ZP_{iv} = W_v \quad \forall v \in V \quad (37)$$

$$\sum_{i \in IC} ZU_{iv} = W_v \quad \forall v \in V \quad (38)$$

$$ZP_{iv} \leq \sum_{d \in D} Z_{idv} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (39)$$

$$ZU_{iv} \leq \sum_{d \in D} Z_{idv} \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (40)$$

$$Y_{ii'v} \leq \sum_{d \in D} Z_{idv} \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (41)$$

$$Y_{i'iv} \leq \sum_{d \in D} Z_{idv} \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (42)$$

Las ecs. (43) y (44) establecen que, si el pedido del cliente  $i$  en la ventana de tiempo  $d$  es entregado con el vehículo  $v$ , entonces el cliente  $i$  es el primero visitado en la ruta de  $v$  o

bien tendrá un único precedente. De forma similar, las ecs. (45) y (46) determinan que, si el pedido del cliente  $i$  para la ventana  $d$  es entregado por  $v$ , el cliente  $i$  será el último del recorrido o, caso contrario, tendrá un único sucesor. Finalmente, la ec. (47) garantiza que la relación de precedencia entre dos clientes en un mismo vehículo sea única.

$$ZP_{iv} + \sum_{i' \in IC} Y_{i'iv} \geq Z_{idv} \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (43)$$

$$ZP_{iv} + \sum_{i' \in IC} Y_{i'iv} + Z_{idv} \leq 2 \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (44)$$

$$ZU_{iv} + \sum_{i' \in IC} Y_{i'iv} \geq Z_{idv} \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (45)$$

$$ZU_{iv} + \sum_{i' \in IC} Y_{i'iv} + Z_{idv} \leq 2 \quad \forall i \in IC, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (46)$$

$$Y_{i'v} + Y_{iiv} \leq 1 \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (47)$$

Para las restricciones de tiempo se definen las siguientes variables continuas:  $DT_v$  que representa el tiempo de partida del vehículo  $v$ , y  $DET_{iv}$  que indica el tiempo de arribo al cliente  $i$  en el vehículo  $v$ .

La ec. (48) garantiza que cada vehículo no puede partir de la planta hasta que todos los lotes asignados a éste sean procesados en la última etapa de producción. La ec. (49) determina que, si el vehículo  $v$  es utilizado y éste visita a algún cliente en la ventana  $d$ , el tiempo de partida del vehículo no puede superar el límite superior de la dicha ventana. A fin de reducir el espacio de búsqueda, la ec. (50) asegura que los vehículos de un mismo tipo sean utilizados en orden ascendente. Para tales casos, la ec. (51) establece que el tiempo de partida de un vehículo  $v$ , sea menor o igual al tiempo de partida del siguiente vehículo del mismo tipo. En todas las restricciones,  $M_2$  representa un escalar suficientemente grande.

$$DT_v \geq FT_{b_{pj}} - M_2 \left( 2 - \sum_{m \in M_j} X_{b_{pm}} - R_{b_{pv}} \right) \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, j = \text{card}(J), \forall v \in V \quad (48)$$

$$DT_v \leq c_d W_v + M_2 (1 - Z_{idv}) \quad \forall i \in IC_d, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (49)$$

$$W_v \geq W_{v+1} \quad \forall v, v+1 \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (50)$$

$$DT_v - DT_{v+1} \leq M_2 (2 - W_v - W_{v+1}) \quad \forall v, v+1 \in VVT_{vt}, vt \in VT \quad (51)$$

El tiempo de entrega de los pedidos a los clientes dependerá del tiempo de partida de cada vehículo. Si el cliente  $i$  es el primero visitado en la ruta del vehículo  $v$ , el tiempo de entrega se define por las ecs. (52) y (53), donde  $i_0$  representa la planta de producción. De forma similar, si el cliente  $i'$  es precedido por el cliente  $i$  en la ruta de  $v$ , el tiempo de entrega al cliente  $i'$  será igual al tiempo de entrega de su predecesor más el tiempo de viaje entre ellos (ecs. (54) y (55)). En el caso que  $ZP_{iv} = 0$  y/o  $Y_{i'v} = 0$ , se utilizan escalares  $M_3, M_4$  adecuados que aseguran que estas ecuaciones resultan redundantes.

$$DET_{iv} \geq DT_v + tv_{i_0 i} - M_3 (1 - ZP_{iv}) \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (52)$$

$$DET_{iv} \leq DT_v + tv_{i_0 i} + M_4 (1 - ZP_{iv}) \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (53)$$

$$DET_{i'v} \geq DET_{iv} + tv_{i'i} - M_3(1 - Y_{ii'v}) \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (54)$$

$$DET_{i'v} \leq DET_{iv} + tv_{i'i} + M_4(1 - Y_{ii'v}) \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (55)$$

Los pedidos realizados por los clientes deben ser entregados dentro de los límites de la ventana de tiempo  $d$  correspondiente (ecs. (56) y (57)). La ec. (58) hace cero la variable  $DET_{iv}$  en el caso que no se entregue algún pedido del cliente  $i$  con el vehículo  $v$ .

$$DET_{iv} \geq a_d W_v + M_2(1 - Z_{idv}) \quad \forall i \in IC_d, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (56)$$

$$DET_{iv} \leq c_d W_v + M_2(1 - Z_{idv}) \quad \forall i \in IC_d, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (57)$$

$$DET_{iv} \leq M_2 \sum_{d \in D} Z_{idv} \quad \forall i \in IC_d, \forall v \in V \quad (58)$$

Finalmente, las ecs. (59)-(63) imponen el valor cero para las variables  $R_{bpv}$ ,  $Z_{idv}$ ,  $Y_{ijv}$ ,  $DT_v$ ,  $DET_{iv}$  si el vehículo  $v$  no es usado.

$$R_{bpv} \leq W_v \quad \forall b \in B_p, \forall p \in P, \forall v \in V \quad (59)$$

$$Z_{idv} \leq W_v \quad \forall i \in IC_d, \forall d \in D, \forall v \in V \quad (60)$$

$$Y_{ii'v} \leq W_v \quad \forall i, i' \in IC / i \neq i', \forall v \in V \quad (61)$$

$$DT_v \leq M_3 W_v \quad \forall v \in V \quad (62)$$

$$DET_{iv} \leq M_2 W_v \quad \forall i \in IC, \forall v \in V \quad (63)$$

### 3.3 Función Objetivo

La función objetivo es la minimización del costo operativo total (ec. (64)) dado por: los costos de producción (ec. (65)), y los costos de distribución (ec. (66)).

$$\text{Minimizar } (CPROD + CTRANS) \quad (64)$$

$$CPROD = \sum_{b \in B_p} \sum_{p \in P} \sum_{m \in M} fp_{c_{mp}} X_{bpm} \quad (65)$$

$$CTTRANS = \sum_{v \in VT} \sum_{v \in VTT_v} ftc_{vt} W_v + \sum_{i \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in VTT_v} vtc_{vt} dist_{i0} ZP_{iv} + \sum_{i \in IC} \sum_{i' \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in VTT_v} vtc_{vt} dist_{ii'} Y_{ii'v} + \sum_{i \in IC} \sum_{v \in VT} \sum_{v \in VTT_v} vtc_{vt} dist_{i0} ZU_{iv} \quad (66)$$

En cuanto a los costos de producción, se considera un costo de procesamiento fijo por producir cada lote que depende del producto y la unidad en la que se elabore. Para los costos de distribución, se considera un costo fijo por usar el vehículo y un costo variable que depende de la distancia recorrida.

## 4 Caso de estudio

El enfoque propuesto se aplica considerando una planta de producción por lotes de dos etapas, donde cada una dispone de dos unidades no idénticas operando en paralelo, y

donde se deben elaborar un total de quince pedidos demandados por ocho clientes. Cada pedido está compuesto por un mix de hasta tres diferentes productos y está asociado a una de las dos ventanas de tiempo  $d_1$  y  $d_2$  que se proponen, cuyos intervalos (en horas) son: [10, 12] y [15, 17], respectivamente. En cuanto al transporte se dispone de dos tipos de vehículos, donde cada tipo posee cuatro vehículos. Por razones de espacio los datos del ejemplo no son presentados.

El ejemplo fue implementado y resuelto en GAMS 24.7.3, mediante el solver CPLEX 12.6, en un procesador Intel Core i7, 3.20 GHz y 16 GB de RAM. El problema generado tiene 19923 restricciones, 3281 variables y la resolución del mismo demandó un tiempo de CPU de 636 segundos, con 0% gap. El valor óptimo de la función objetivo considerada fue de \$6472.8 (\$1878 costos de producción y \$4594.8 costos de distribución).

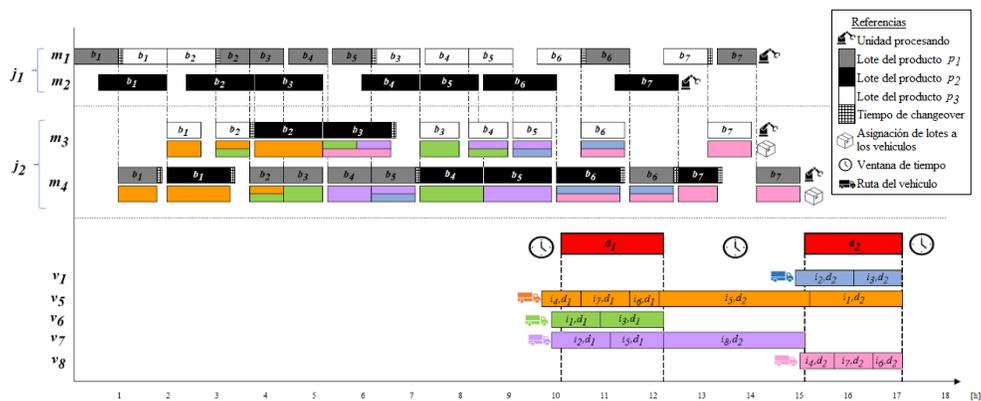


Fig. 1. Schedule de la producción y distribución para el caso de estudio.

En la Figura 1, se puede visualizar la solución óptima hallada, donde se muestra el diagrama de Gantt que refleja el scheduling de la producción y de la distribución obtenido para el caso de estudio presentado. En la parte superior se muestra el scheduling de la producción para cada una de las etapas  $j_1$  y  $j_2$  y las unidades de procesamiento asociadas a cada una de éstas ( $m_1$  y  $m_2$ ,  $m_3$  y  $m_4$ , respectivamente). En la parte media de la figura, en color rojo, se indican las dos ventanas de tiempo ( $d_1$  y  $d_2$ ), y en el parte inferior, se muestra el scheduling de la distribución para cada vehículo seleccionado:  $v_1$ ,  $v_5$ ,  $v_6$ ,  $v_7$  y  $v_8$ . A través de la imagen puede observarse que, en cada etapa de producción, se procesan siete lotes de cada tipo de producto. Estos lotes se diferencian mediante ranuras de diferentes colores, de esta manera las ranuras de color gris, negras y blancas están asociadas a lotes de los productos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$ , respectivamente. Si se analiza la producción por equipo, se observa que en la unidad  $m_1$  se procesan todos los lotes del producto  $p_1$  y  $p_3$ , mientras que los lotes del producto  $p_2$  se procesan en la unidad  $m_2$ . Luego, en la segunda etapa productiva, el equipo  $m_3$  procesa todos los lotes del producto  $p_3$  y dos lotes del producto  $p_2$ , mientras que en la unidad  $m_4$  se procesan los lotes del producto  $p_1$  y cinco lotes del producto  $p_2$ . La longitud de cada ranura hace referencia al tiempo que insumirá el procesa-

miento del batch asignado, el cual depende de su tamaño. Por otro lado, los espacios de trama cuadrículada representan los tiempos de changeovers entre lotes consecutivos cuando éstos son de diferentes productos. Los vehículos utilizados también se representan con diferentes colores: el vehículo  $v_1$  con el color celeste, el vehículo  $v_5$  con el color naranja, el vehículo  $v_6$  con el color verde, el vehículo  $v_7$  con el color lila y el vehículo  $v_8$  con el color rosado. En las filas asociadas a los vehículos puede observarse el tiempo de partida de cada vehículo, los pedidos (cliente, ventana) que transporta cada vehículo, así como también los tiempos de entrega a los clientes. Finalmente, la información relativa a cuáles lotes son asignados a los vehículos se indica en las filas que se encuentran inmediatamente debajo de las asociadas a las unidades  $m_3$  y  $m_4$ . Por ejemplo, el lote  $b_1$  del producto  $p_3$  es asignado totalmente al vehículo  $v_5$ , mientras que el lote  $b_2$  de este mismo producto es asignado en partes a los vehículos  $v_5$  y  $v_6$ .

## 5 Conclusiones

En la literatura del área, la gran mayoría de los trabajos que resuelven las actividades de producción y distribución a nivel operativo y en forma integrada, abordan este problema en ambientes productivos relativamente simples, donde los pedidos o productos deben procesarse en una única etapa de producción la cual dispone de una unidad o varias unidades en paralelo. Un aporte significativo de este trabajo fue el desarrollo de un modelo MILP que permitió integrar simultáneamente las decisiones de scheduling de la producción y de la distribución en una planta batch multiproducto multietapa, con múltiples unidades diferentes operando en paralelo. En el enfoque presentado, cada cliente puede realizar diversos pedidos asociados a diferentes ventanas de tiempo propuestas por la empresa. Para poder cumplir con los requerimientos de los clientes y lograr un mejor aprovechamiento de la capacidad productiva de la planta, las demandas totales de cada producto son consolidadas en una única demanda para ese producto para luego procesarla en diferentes lotes o batches, según las capacidades de las unidades. De esta manera, las decisiones de número y dimensionamiento de los batches, llamado comúnmente problema de batching, son parte importante del problema holístico planteado. De este modo, el modelo determina, simultáneamente, dónde, cómo, y cuando se procesan los pedidos de los clientes y cómo se realiza la carga y el envío de los mismos en los vehículos que hayan sido seleccionados, a fin de reducir los costos de producción y distribución, y satisfaciendo la entrega a los clientes en tiempo y forma.

Como trabajos futuros, se analizará la posibilidad de incluir una estructura de múltiples plantas, un enfoque multiobjetivo, teniendo en cuenta las diferentes medidas de performance, que muchas veces resultan contrapuestas (costos, satisfacción al cliente, productividad), como así también otras metodologías de resolución que permitan resolver problemas de mayor tamaño en tiempos de cómputo razonables.

## Referencias

1. Chen, Z. L., Vairaktarakis, G. L.: Integrated scheduling of production and distribution operations. *Management Science*, 51(4), (2005) 614-628.
2. Ullrich, C. A.: Integrated machine scheduling and vehicle routing with time windows. *European Journal of Operational Research*, 227(1), (2013) 152-165.
3. Moons, S., Ramaekers, K., Caris, A., Arda, Y.: Integrating production scheduling and vehicle routing decisions at the operational decision level: A review and discussion. *Computers and Industrial Engineering*, 104, (2017) 224-245.
4. Yağmur, E., Kesen, S. E.: Multi-trip heterogeneous vehicle routing problem coordinated with production scheduling: Memetic algorithm and simulated annealing approaches. *Computers and Industrial Engineering*, 161, (2021) 107649.
5. Naso, D., Surico, M., Turchiano, B., Kaymak, U.: Genetic algorithms for supply-chain scheduling: A case study in the distribution of ready-mixed concrete. *European Journal of Operational Research*, 177(3), (2007) 2069-2099.
6. Farahani, P., Grunow, M., Günther, H. O.: Integrated production and distribution planning for perishable food products. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 24(1), (2012) 28-51.
7. Armstrong, R., Gao, S., Lei, L.: A zero-inventory production and distribution problem with a fixed customer sequence. *Annals of Operations Research*, 159(1), (2008) 395-414.
8. Kergosien, Y., Gendreau, M., Billaut, J. C.: A Benders decomposition-based heuristic for a production and outbound distribution scheduling problem with strict delivery constraints. *European Journal of Operational Research*, 262(1), (2017) 287-298.
9. Lee, J., Kim, B. I., Johnson, A. L., Lee, K.: The nuclear medicine production and delivery problem. *European Journal of Operational Research*, 236 (2), (2014) 461-472.
10. Ceylan, Z., Bulkan, S., Tozan, H.: Integrated supply chain scheduling models: a literature review. *Journal of Engineering Sciences and Design*, 7(1), (2019) 182-195.
11. Kumar, R., Ganapathy, L., Gokhale, R., Tiwari, M. K.: Quantitative approaches for the integration of production and distribution planning in the supply chain: a systematic literature review. *International Journal of Production Research*, 58(11), (2020) 3527-3553.
12. Ramezani, R., Mohammadi, S., Cheraghalikhani, A.: Toward an integrated modeling approach for production and delivery operations in flow shop system: Trade-off between direct and routing delivery methods. *Journal of Manufacturing Systems*, 44, (2017) 79-92.
13. Rahman, H. F., Janardhanan, M. N., Poon Chuen, L., Ponnambalam, S. G.: Flowshop scheduling with sequence dependent setup times and batch delivery in supply chain. *Computers and Industrial Engineering*, 158, (2021) 107378.
14. Chevroton, H., Kergosien, Y., Berghman, L., Billaut, J.: Solving an integrated scheduling and routing problem with inventory, routing and penalty costs. *European Journal of Operational Research*, 294(2), (2021) 571-589.
15. Hou, Y., Fu, Y., Gao, K., Zhang, H., Sadollah, A.: Modelling and optimization of integrated distributed flow shop scheduling and distribution problems with time windows. *Expert Systems with Applications*, 187, (2022) 115827.
16. Mohammadi, S., Al-e-Hashem, S. M. J. M., Rekik, Y.: An integrated production scheduling and delivery route planning with multi-purpose machines: A case study from a furniture manufacturing company. *International Journal of Production Economics*, 219, (2020) 347-359.