

Optimización de la producción, inventario y distribución de múltiples productos en una empresa manufacturera

Lucas Porporatto¹, Gabriela Corsano¹, Yanina Fumero¹

¹ Instituto de Desarrollo y Diseño, CONICET-UTN, Avellaneda 3657, S3002GJC Santa Fe, Argentina
{lporporatto, gcorsano, yfumero}@santafe-conicet.gov.ar

Resumen. En los últimos años, la coordinación de las tareas de producción, inventario y distribución de productos se ha vuelto necesaria para afrontar las exigencias del mercado al menor costo posible. Este trabajo consiste en abordar, mediante un enfoque de programación mixta-entera lineal (MILP), el problema conocido en la literatura como *Production-Inventory-Routing Problem* (PIRP), aplicado a una industria manufacturera de la provincia de Santa Fe. El desafío de estos modelos reside precisamente en responder de forma conjunta y coordinada a las preguntas de qué, cuándo y cuánto producir, cuánto de ello almacenar en la fábrica y cómo distribuir luego los múltiples productos de la empresa a los diferentes clientes de tal manera que se satisfaga la demanda y se minimicen los costos de toda la cadena de suministros. Para ello se propone la resolución secuencial de dos modelos MILP, uno para determinar la producción, inventario y entrega de productos, y otro para el ruteo, a fin de lograr resultados cercanos al óptimo en un tiempo de cómputo razonable. La solución obtenida para un ejemplo concreto de la industria muestra que, en tan solo minutos, es posible organizar todas las tareas antes mencionadas para una semana laboral completa al mínimo costo.

Keywords: *Production Inventory Routing Problem*, Optimización, MILP, *Backorder*.

1 Introducción

Gestionar la producción, inventario y distribución de productos es una tarea que debe llevarse a cabo diariamente en cualquier industria manufacturera. Históricamente, estas decisiones se tomaban de forma secuencial e independiente, determinando por un lado el plan de producción y por el otro la distribución final de los productos a los diferentes clientes, utilizando así al inventario como desacople entre ambos. Sin embargo, la globalización de la economía en general (y de sus correspondientes cadenas de suministro), junto con la elevada competencia que esto genera en los mercados, hace imperante la necesidad de hacer un uso más eficiente de los recursos al mismo tiempo de aumentar el servicio a los clientes. Es por esto que, en los últimos años, la gestión de la cadena de abastecimiento se está enfocando en la integración tanto de actores como de decisiones debido a los beneficios que genera ([1], [2]).

Bajo esta mirada, y facilitado por el avance de la tecnología, se desarrollaron nuevas formas de integrar la cadena de suministros. Entre ellas se encuentra el acuerdo

conocido como *Vendor Managed Inventory* (VMI). Este consiste en la administración del inventario de los clientes por parte de sus proveedores, requiriendo para ello constante conocimiento de los niveles del mismo (he aquí la necesidad de la tecnología). De esta forma, al saber el inventario de sus clientes, las industrias proveedoras pueden resolver de forma integrada el problema de planificación de la cadena de abastecimiento, lo que resulta en una utilización más eficiente de los recursos en general [3].

La optimización de la cadena de suministros integrando sus eslabones implica tomar cuatro decisiones claves de nivel táctico-operativo [4]: (i) qué productos manufacturar y cuándo hacerlo, (ii) cuándo visitar a cada cliente, (iii) cuánto entregar a estos en la visita, y por último (iv) qué ruta utilizar para llegar a ellos. Estos interrogantes, de forma separada, son problemas ampliamente conocidos y trabajados en la literatura: *lot-sizing problem* (LSP) para las decisiones (i), (ii) y (iii), y *Vehicle Routing Problem* (VRP) para las decisiones (ii), (iii) y (iv). Además, si se incorpora la gestión del inventario al VRP, se transforma en otro problema conocido en la literatura como *Inventory Routing Problem* (IRP). Finalmente, abordar los problemas LSP e IRP de forma simultánea (es decir, tomar las 4 decisiones juntas), implica un desafío mayor, el cual se conoce como *Production Inventory Routing Problem* (PIRP). Es este el problema sobre el cual se enfoca el presente trabajo.

Los problemas PIRP han recibido mucha atención en la última década a través de diferentes formulaciones. Dado que LSP y VRP son problemas *NP-hard*, por extensión también lo son IRP y fundamentalmente PIRP. Si bien existen desarrollos de métodos exactos para abordarlo, como *Branch and price* [4], *Lagrangian relaxation* ([5], [6]) y variantes del algoritmo *branch and cut* ([7], [8]), la mayoría de los trabajos están enfocados en métodos heurísticos como *large neighborhood search* [9], *tabu search* [10], *greedy randomized adaptive search procedures* [11], *memetic algorithms* [12] y *particle swarm optimization* [13]. Incluso se han desarrollado métodos iterativos ([14], [15], [16]) y heurísticos basados en programación matemática [17]. El presente trabajo se encuentra bajo esta última línea, dado que se utilizará programación matemática para alcanzar valores cercanos al óptimo del PIRP en tiempo razonable. Para una revisión más exhaustiva de la bibliografía, se sugiere consultar Hrabec y col. [18].

El objetivo es generar una formulación matemática del PIRP que se adapte a las necesidades de una empresa manufacturera de la provincia de Santa Fe y le sirva como sistema de soporte en la toma de las decisiones involucradas. Debido a la complejidad que presenta el PIRP, se propone descomponerlo en dos modelos, uno para determinar la producción, inventario y entrega de productos, y otro para el ruteo.

Las particularidades que presenta este enfoque, diferenciándose de los casos de la bibliografía, han generado los principales aportes del trabajo. Ellos son:

- Gestión de *backorders* y
- Diversidad de nodos a atender: sucursales, clientes finales y clientes prioritarios.

Por un lado, se considera *backorder* a aquellos productos demandados por un cliente y que no han podido cumplirse a tiempo, por lo que quedan pendientes de entrega. Son escasos los trabajos del área que permiten el atraso en la entrega de productos o, en otras palabras, el incumplimiento de la demanda. De la búsqueda realizada, sólo el

trabajo de Brahim y Aouam [19] contempla la posibilidad de *backorders*. Sin embargo, estos autores consideran una flota de vehículos homogénea, a diferencia del caso que se aborda en donde se tienen en cuenta diferentes tipos de vehículos. Por otro lado, se contemplan sucursales y clientes finales a atender, habiendo dentro de éstos últimos un grupo denominado prioritarios, sobre los que no se permite incurrir en *backorder*. De esta manera, la presente formulación considera diferentes tipos de nodos a satisfacer y, de acuerdo con la búsqueda realizada, ningún trabajo del área hace esta distinción, a pesar de ser una característica usual de la industria en general, ya que es habitual tener en simultáneo sucursales y clientes finales (con mayor o menor prioridad).

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se detalla el problema a abordar, para luego presentar su formulación matemática en la sección 3. La sección 4 está destinada al caso de estudio con los resultados computacionales del modelo, dejando las conclusiones y posibles futuros trabajos para la sección 5.

2 Descripción del problema

Se plantea y resuelve el problema conjunto de toma de decisiones vinculadas a la producción, inventario y distribución de productos en una cadena de suministros. Se considera la producción de múltiples productos en una fábrica con limitaciones diarias en su capacidad productiva y de almacenamiento. Las órdenes de los clientes (demandas) son conocidas sobre un conjunto finito y discreto de períodos de tiempo, siendo usualmente días. Estas demandas son satisfechas con productos enviados desde la fábrica a través de diferentes rutas. Existe un conjunto de rutas conocidas y cada cliente se ubica sobre una o más de ellas. Todas las rutas pasan por la planta y debe determinarse cuáles utilizar y a qué clientes visitar a través de ellas en cada viaje. Para las entregas, se cuenta con un conjunto de vehículos de distintas capacidades. Los puntos de demanda se encuentran distribuidos a lo largo y ancho del país y poseen características que los distinguen unos de otros: algunos son sucursales de la misma empresa con capacidad de almacenamiento, mientras que otros son clientes finales, dentro de los cuales algunos poseen prioridad sobre otros. Existen diferentes costos sobre los que se incurre en esta cadena de suministro. Al momento de producir, hay costos fijos y costos variables que dependen de la cantidad producida. El inventario que se genera tanto en la fábrica como en las sucursales implica un costo, de igual manera que el uso de vehículos para el transporte significa un costo variable (por la distancia recorrida) y un costo fijo (por su utilización en un determinado día). Por último, el incumplimiento de las órdenes de los clientes también se imputa como un costo de penalización.

La política de distribución utilizada es conocida como *máximo nivel* (ML). Esta consiste en entregar a cada sucursal una cantidad de productos restringida simplemente por su espacio de almacenamiento y la capacidad del vehículo utilizado. Esto se diferencia de la alternativa conocida como *Order-up to level* (OU), en la cual siempre que se decida visitar a una sucursal debe completarse el inventario hasta su nivel máximo. En ML no es necesaria esta condición.

3 Formulación

3.1 PIRP

En esta sección presentamos uno de los modelos MILP para resolver el problema PIRP anteriormente planteado. Consideramos un conjunto $V: \{0, \dots, V\}$ de nodos, identificando la fábrica con el índice 0, a las sucursales como $V_S \subseteq V$, clientes finales como $V_{CF} \subseteq V$ y clientes prioritarios como $V_{CFP} \subseteq V_{CF}$. Estos nodos se encuentran a su vez agrupados de acuerdo a las localidades $L: \{1, \dots, L\}$ a las cuáles pertenecen, mediante la relación V_L . La fábrica es la encargada de generar los productos $P: \{1, \dots, P\}$, los cuales se agrupan en familias de productos $F: \{1, \dots, F\}$ a través de la relación P_F , cada una de ellas con capacidad de producción limitada, $CapF_f$. Los productos son almacenados en la fábrica para luego ser distribuidos a los distintos nodos con el objetivo de satisfacer las órdenes de pedido $O: \{1, \dots, O\}$, con demandas $d_{o,p}$, a lo largo de un horizonte de tiempo discreto $T: \{1, \dots, T\}$. Toda orden posee una fecha límite de entrega indicada con la relación O_T , además de estar asociada a un nodo mediante la relación O_v . Si bien toda orden pertenece a un único nodo, estos pueden tener múltiples órdenes asociadas con distintas fechas límite.

La entrega de los productos se realiza a través de un conjunto de rutas $R: \{1, \dots, R\}$ existentes, que recorren distintas localidades (y en consecuencia nodos). El conjunto L_R contiene las localidades que pertenecen a cada ruta (relación localidad-ruta). Los reparos son realizados por una flota de vehículos $K: \{1, \dots, K\}$ heterogénea, los cuales corresponden a diferentes tipos de vehículos $C: \{1, \dots, C\}$ que son vinculados a través de la relación C_K . La Tabla 1 completa la definición de los restantes subconjuntos y parámetros.

El objetivo del PIRP es minimizar el costo asociado a producción, inventario y distribución de los productos sujeto a restricciones de capacidad en las diferentes etapas. El modelo matemático es formulado utilizando las siguientes variables de decisión:

- $Y_{c,r,t}$: variable binaria, igual a 1 si se utiliza al menos un vehículo de tipo c por la ruta r en el tiempo t ,
- $X_{f,t}$: variable binaria, igual a 1 si se produce la familia f en el tiempo t ,
- $Q_{p,t}$: unidades de producto p producidas en el tiempo t ,
- $Q_{p,r,v,t}$: unidades de producto p enviadas al nodo v mediante la ruta r en el tiempo t ,
- $I_{p,v,t}$: unidades de producto p almacenadas en el nodo v al finalizar el tiempo t ,
- $Bg_{p,v,t}$: unidades acumuladas de producto p demandadas y no cumplidas en el nodo v al finalizar el tiempo t (*backorder*),
- $Nc_{c,r,t}$: número de vehículos a utilizar de tipo c en la ruta r en el tiempo t y
- CT : costo total

Tabla 1. Notación de la formulación

Símbolo	Descripción
V	Conjunto de nodos sin la fábrica.
V_1	Conjunto de nodos v que gestionan inventario: $V_s \cup V_0$
V_L	Relación entre nodos v y localidades l .
C_K	Relación entre tipo de vehículo c y vehículo k .
$I_{p,v}$	Unidades de p inventariadas en v a tiempo $t = 0$
$CapV_v$	Capacidad máxima de almacenamiento en metros cúbicos del nodo $v \in V_1$
$SS_{p,v}$	Unidades de stock mínimo de producto p a mantener en el nodo $v \in V_1$
$df_{r,l}$	Distancia desde la fábrica a la localidad l por la ruta r
dfp_r	Distancia promedio de la ruta r desde la fábrica
$CapC_c$	Volumen máximo que puede transportar un vehículo de tipo c
$n_{c,t}$	Número de vehículos del tipo c disponibles por período de tiempo t
Vol_p	Volumen del producto p
CT_c	Costo de movilizar 1 kilómetro un vehículo de tipo c
CFT_c	Costo fijo de movilizar un vehículo de tipo c durante un período de tiempo
CS_f	Costo fijo de producir la familia f durante un período de tiempo
CP_p	Costo de producir una unidad del producto p
CI_p	Costo de inventario por unidad de producto p durante un período de tiempo
CB_p	Costo unitario de penalización por tener <i>backorder</i> del producto p
FUP	Factor de utilización de la producción
FUT	Factor de utilización mínimo del transporte
FUM	Factor de utilización máximo del transporte

Las ecuaciones del PIRP asociado son:

$$\begin{aligned}
 \min CT = & \sum_{f \in F} \sum_{t \in T} X_{f,t} \cdot CS_f + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} Qp_{p,t} \cdot CP_p + \\
 & \sum_{v \in V_i} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} I_{p,v,t} \cdot CI_p + \sum_{v \in V_{CF}} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} Bg_{p,v,t} \cdot CB_p + \\
 & \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} CT_c \cdot dfp_r \cdot Nc_{c,r,t} \cdot 2 + Nc_{c,r,t} \cdot CFT_c \quad (1)
 \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\sum_{p \in P_f} Qp_{p,t} \leq X_{f,t} \cdot CapF_f, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (2)$$

$$\sum_{p \in P_f} Qp_{p,t} \geq FUP \cdot X_{f,t} \cdot CapF_f, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (3)$$

$$I_{p,0,t-1} + Qp_{p,t-1} = I_{p,0,t} + \sum_{r \in R} \sum_{v \in V'} Q_{p,r,v,t}, \quad \forall t \in T, p \in P \quad (4)$$

$$\sum_{p \in P} I_{p,v,t} \cdot Vol_p \leq CapV_v, \quad \forall t \in T, v \in V_I \quad (5)$$

$$I_{p,v,t} \geq SS_{p,v}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_I \quad (6)$$

$$I_{p,v,t-1} + \sum_{r,l \in L_R, V_L} Q_{p,r,v,t} = I_{p,v,t} + \sum_{\substack{o \in O_v \\ o \in O_t}} d_{o,p}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_S \quad (7)$$

$$Bg_{p,v,t} + \sum_{r,l \in L_R, V_L} \sum_{t'=1}^t Q_{p,r,v,t'} = \sum_{t'=1}^t \sum_{\substack{o \in O_v \\ o \in O_t}} d_{o,p}, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_{CF} \quad (8)$$

$$Bg_{p,v,t} = 0, \quad \forall t \in T, p \in P, v \in V_{CFP} \quad (9)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{\substack{l \in L_R \\ v \in V_L}} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq \sum_{c \in C} (Y_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot n_c), \quad \forall r \in R, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{\substack{l \in L_R \\ v \in V_L}} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p \geq \sum_{c \in C} (Y_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FU), \quad \forall r \in R, t \in T \quad (11)$$

$$\sum_{c \in C} (Nc_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM) \geq \sum_{p \in P} \sum_{v \in V} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p, \quad \forall r \in R, t \in T \quad (12)$$

$$\sum_{c \in C} (Nc_{c,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUT) \leq \sum_{p \in P} \sum_{v \in V} Q_{p,r,v,t} \cdot Vol_p, \quad \forall r \in R, t \in T \quad (13)$$

$$\sum_{r \in R} Nc_{c,r,t} \leq n_{c,t} \quad \forall c \in C, t \in T \quad (14)$$

$$Nc_{c,r,t} \leq Y_{c,r,t} \cdot n_{c,t} \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (15)$$

$$Nc_{c,r,t} \geq Y_{c,r,t} \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (16)$$

$$X_{f,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in T, f \in F \quad (17)$$

$$Y_{c,r,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (18)$$

$$I_{p,v,t}, Bg_{p,v,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, v \in V, t \in T \quad (19)$$

$$Q_{p,r,v,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, r \in R, v \in V, t \in T \quad (20)$$

$$Q_{p,t} \geq 0 \quad \forall p \in P, t \in T \quad (21)$$

$$Nc_{c,r,t} \geq 0 \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T \quad (22)$$

La función objetivo (1), tal como se mencionó anteriormente, minimiza la suma total de los costos de producción, inventario, *backorder* y distribución, en dicho orden. Restricciones (2) y (3) establecen límites superiores e inferiores para la producción de cada familia de productos, respectivamente. Ecuación (4) define el balance del inventario en la fábrica teniendo en cuenta las unidades producidas y distribuidas. Notar que las unidades producidas impactan en el inventario de la fábrica un día después de generarse. Las restricciones (5) y (6) determinan las cantidades máximas y mínimas que se pueden almacenar tanto en la fábrica como en las sucursales. El balance de inventario en las sucursales se refleja en la ecuación (7). Ecuación (8) representa el cumplimiento de la demanda de los clientes finales, convirtiéndose en *backorder* aquellos productos no entregados, generando un impacto negativo en la función objetivo. Esta restricción es creada sólo a partir de que ocurra una demanda del producto p en el cliente v y no antes, lo que permite reflejar también la posibilidad de realizar entregas tempranas de productos. La ecuación (9) impide incurrir en *backorder* con los clientes finales prioritarios.

En lo que respecta a la etapa de distribución, se determina qué ruta utilizar para visitar a las localidades y atender a los correspondientes clientes. Las restricciones (10) y (11) son la vinculación entre las variables Q e Y . Estas ecuaciones limitan superior e inferiormente el volumen que se puede transportar por cada ruta y período de tiempo en función del tipo de vehículo utilizado. Las restricciones (12) y (13) definen la cantidad de vehículos a utilizar de cada tipo en función de los volúmenes transportados. La ecuación (14) limita la cantidad de vehículos a usar por día y por su tipo. Las restricciones (15) y (16) vinculan las variables Nc e Y . Ecuaciones (17)-(22) son las definiciones de las variables.

Es importante destacar que en la presente formulación no determina el ruteo de cada vehículo, sino que establece de manera general qué transportar, cuándo, a quiénes y por qué ruta (variable Q), y el número de vehículos de cada tipo a utilizar en dicha ruta (variable Nc). Esto implica que el costo de transporte no se calcula con precisión sobre los kilómetros recorridos por cada vehículo, sino que es una aproximación vinculada a la ruta recorrida (parámetro d_{fp}) y al número de vehículos a usar, como puede verse en el último término de la función objetivo (1). Esto impide encontrar el óptimo global del PIRP completo. Sin embargo, permite generar soluciones de calidad en un tiempo considerablemente menor al que lleva resolver un PIRP integrando ambas etapas.

Para generar entonces una completa solución al PIRP que defina la asignación óptima de vehículos a las entregas determinadas y precise qué productos llevará cada vehículo, se propone una formulación MILP complementaria, la cual se nutre de la solución entregada por el modelo ya descrito. La descomposición del modelo es una estrategia usual en este tipo de problemas de optimización (Absi y col. [14] entre los más destacados) ya que facilita el hallazgo de soluciones óptimas o cercanas a esta.

3.2 Asignación de vehículos

El objetivo de esta nueva formulación es completar la solución del PIRP abordado y determinar cuáles vehículos del conjunto $K: \{1, \dots, K\}$ serán los que entreguen cada uno de los productos que resultan de la variable Q . Esta asignación se hará buscando

reducir los costos de transporte, ahora sí con mayor precisión ya que es posible calcular la distancia que recorre cada uno de ellos.

Para este problema se definen las siguientes variables de decisión:

- $Z_{k,r,t}$: variable binaria, igual a 1 si el vehículo k recorre la ruta r en el tiempo t ,
- $W_{k,v,r,t}$: variable binaria, igual a 1 si el vehículo k visita al nodo v por la ruta r en el tiempo t ,
- $Q_{k,p,r,v,t}$: unidades del producto p enviadas por el vehículo k al nodo v por la ruta r en el período de tiempo t ,
- $D_{k,r,t}$: distancia recorrida del vehículo k a través de la ruta r en el tiempo t
- CCT : costo total de transporte

Las ecuaciones de la nueva formulación son:

$$\min CCT = \sum_{c,k \in C_k} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} D_{k,r,t} \cdot CT_c + \sum_{t \in T} \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} N_{c,r,t} \cdot CFT_c \quad (23)$$

$$Q_{p,r,v,t} = \sum_{k \in K} Q_{k,p,r,v,t} \quad \forall t \in T, r \in R, p \in P, v \in V \quad (24)$$

$$\sum_{k \in C_k} Z_{k,r,t} = N_{c,r,t} \quad \forall r \in R, t \in T \quad (25)$$

$$\sum_{r \in R} Z_{k,r,t} \leq 1 \quad \forall k \in K, t \in T \quad (26)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{v,l \in L_{R,V_L}} Q_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq Z_{k,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM \quad \forall r \in R, t \in T, c, k \in C_K \quad (27)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{v,l \in L_{R,V_L}} Q_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \geq Z_{k,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUT \quad \forall r \in R, t \in T, c, k \in C_K \quad (28)$$

$$\sum_{p \in P} Q_{k,p,r,v,t} \cdot Vol_p \leq W_{k,v,r,t} \cdot CapC_c \cdot FUM \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, c, k \in C_K \quad (29)$$

$$\sum_{p \in P} Q_{k,p,r,v,t} \geq W_{k,v,r,t} \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, k \in K \quad (30)$$

$$W_{k,v,r,t} \leq Z_{k,r,t} \quad \forall v \in V, r \in R, t \in T, k \in K \quad (31)$$

$$\sum_{v \in V} W_{k,v,r,t} \geq Z_{k,r,t} \quad \forall r \in R, t \in T, k \in K \quad (32)$$

$$D_{k,r,t} \geq 2 \cdot df_{r,t} \cdot W_{k,v,r,t} \quad \forall k \in K, t \in T, r \in R, v, l \in L_{R,V_L} \quad (33)$$

$$\sum_{r \in R} Z_{k,r,t} \geq \sum_{r \in R} Z_{k+1,r,t} \quad \forall t \in T, c k \in C_K \quad (34)$$

$$Z_{k,r,t} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, r \in R, t \in T \quad (35)$$

$$W_{k,v,r,t} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, v \in V, r \in R, t \in T \quad (36)$$

$$D_{k,r,t} \geq 0 \quad \forall k \in K, v \in V, r \in R, t \in T \quad (37)$$

$$Qk_{k,p,r,v,t} \geq 0 \quad \forall k \in K, p \in P, r \in R, v \in V, t \in T \quad (38)$$

La función objetivo (23) representa el costo de transporte de los vehículos en función de las distancias que finalmente recorren y del número que se utiliza para cada período de tiempo, en dicho orden. La ecuación (24) reparte los productos a entregar (determinados en la formulación PIRP) a los diferentes vehículos que finalmente se utilicen. Ecuación (25) determina los vehículos que se utilizarán de acuerdo al número que se obtuvo de éstos en la solución del PIRP. Notar que la variable Nc brinda información también sobre el tipo de vehículo a utilizar, por lo que la activación de vehículos (variable Z) respeta esta condición. La restricción (26) limita a uno el número total de rutas que puede recorrer un vehículo en un período de tiempo, es decir que, por día, cada vehículo realiza a lo sumo un viaje. Restricciones (27) y (28) vinculan las variables binarias de asignación de vehículos a rutas (Z) con la variable no negativa de productos a entregar (Qk), restringiendo volumétricamente al vehículo tanto superior como inferiormente, respectivamente. Una situación análoga ocurre con las restricciones (29) y (30), asociando la variable binaria que indica a qué nodo visita cada vehículo (W) con la variable no negativa de productos a entregar (Qk).

Las restricciones (31) y (32) relacionan las dos nuevas binarias de esta formulación. Ecuación (33) es el cálculo de la distancia que recorre cada vehículo. Notar que se multiplica por 2 dado que el parámetro $df_{r,t}$ sólo mide la distancia de ida de los viajes, la cual se considera igual a la de vuelta. Restricción (34) es utilizada para realizar cortes de simetría, debido a la indiferencia del modelo en optar por dos vehículos de igual tipo, pero diferente índice. Por último, ecuaciones (36)-(39) son las definiciones de dominio de las variables.

4 Caso de estudio y Resultados

Las formulaciones fueron codificadas e implementadas en GAMS (*General Algebraic Modeling System*) 42.4.0 y ejecutadas con el *solver* CPLEX 22.1. La estación de trabajo utilizada cuenta con un procesador Intel® Core™ i7 CPU 3.2 GHz, 16GB de RAM y sistema operativo Windows 10.

La empresa bajo consideración produce 228 productos diferentes agrupados en 9 familias para satisfacer las demandas de 5 sucursales y 127 clientes finales, de los cuales 50 son prioritarios. Se cuenta con un total de 66 rutas, las cuales recorren entre 1 y 11 localidades como máximo, existiendo localidades que son recorridas por más de una ruta. Se trabaja con un horizonte de tiempo de 6 períodos (una semana laboral), sobre el cual se distribuyen 218 órdenes de pedido. Estas órdenes suman un total de 5526

unidades de producto demandadas. A modo de resumen, y para dimensionar el problema, se presentan las Tablas 2 y 3 con información sobre la composición de las familias de productos, las sucursales y sus demandas.

Tabla 2. Información sobre Familias y Productos

Familia F	N° de productos P_F	Cap. de producción diaria $CapF_j$ [u]	Volumen promedio [m^3/u]	Demanda total [u]
F1	6	52	0.05	190
F2	1	19	0.04	102
F3	16	273	0.03	795
F4	42	118	0.56	1737
F5	11	53	0.15	93
F6	30	219	0.53	1186
F7	92	126	0.86	789
F8	16	11	1.11	81
F9	14	105	0.5	553
Total	228	976	-	5526

Tabla 3. Información sobre las sucursales

Sucursal V_S	Rutas L_R	Distancia promedio [km]	N° órdenes O_v	Demanda total [u]
Buenos Aires	R1	510	44	1319
Rosario	R20-R21-R22 R23-R24-R27	239	14	198
Cipolletti	R44-R45-R46 R47-R48	1418	7	197
Córdoba	R9-R12-R13	303	10	233
Resistencia	R57-R58-R59 R60	795	15	456
Total	-	-	90	2403

Como se observa, el tamaño del modelo para el caso propuesto es grande. A modo de ejemplo, el número de variables $Q_{p,r,v,t}$, considerando la dimensión de los conjuntos involucrados, es de casi 12 millones (por la cantidad de productos, rutas, nodos y períodos: $228*66*132*6 = 11.918.016$). Sin embargo, debido a las relaciones establecidas entre los distintos conjuntos, muchas de éstas toman valor de 0, reduciendo a menos de 13.000 el número de variables definidas.. Aplicando esta lógica a otras variables (B_g , I , Q_k , W , Z), se obtiene finalmente una formulación de 15.382 ecuaciones con 23.628 variables para el PIRP y 30.087 ecuaciones con 9.848 variables para la asignación de vehículos.

El PIRP se resuelve en 140 segundos con un gap menor al 1%. El valor de la función objetivo es de \$3.623.612 (\$1.096.024 de costo de transporte, \$945.070 de costo de producción, \$870.888 de costo de inventario y \$711.630 de penalización por *backorder*). A partir de la solución de este modelo, se resuelve la asignación de vehículos, donde se obtiene la solución óptima en menos de un segundo, con un costo de transporte (función objetivo) de \$1.296.504. Este costo, al ser mayor que el de transporte obtenido

en la formulación del PIRP, muestra que utilizar el promedio de las distancias de una ruta es una subestimación de la distancia recorrida.

Una de las decisiones del modelo es la cantidad a producir de cada producto. Dado que son demasiados productos, en la Figura 1 se resume esta información a través de las familias y la utilización de su capacidad. Como se observa, existe la necesidad de producir casi todas las familias (exceptuando F2) al menos un período de tiempo, además de respetarse los niveles mínimos de producción (70% de utilización).

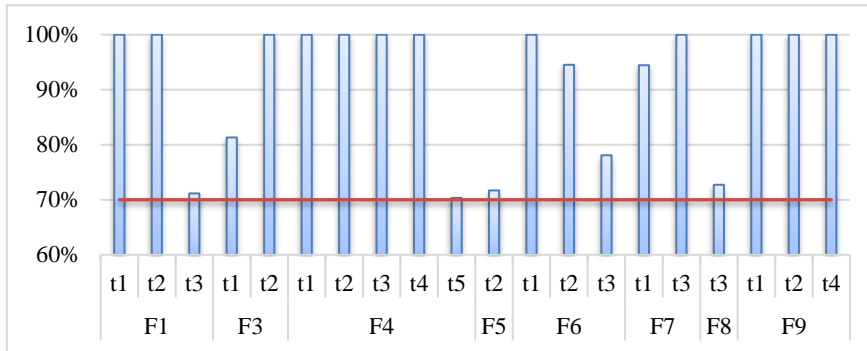


Fig. 1. Niveles porcentuales de producción de cada familia (barras) y niveles mínimos (línea)

El inventario en la fábrica aumenta en función de las cantidades producidas (Q_p) y disminuye según la entrega de productos a los distintos nodos (Q). En la Tabla 4 se muestra, a modo de ejemplo, cómo varía el *stock* de uno de los productos más demandados perteneciente a la familia F1. Es importante recordar que la producción del día t impacta en el inventario de la fábrica el día $t+1$, por lo que el inventario al inicio de $t2$ (77) se explica por el inventario al finalizar $t1$ (5) más la producción de dicho período (72). Se puede ver también cómo el *stock* de seguridad de 5 unidades implica un soporte en los niveles de inventario al final de cada día.

Tabla 4. Evolución del inventario en la fábrica del producto P0350070001200029

Tiempo T	Inventario I al inicio de t	Envíos Q	Inventario I al final de t	Producción Q_p
t1	15	10	5	72
t2	77	72	5	184
t3	189	143	46	-
t4	46	41	5	-
t5	5	-	5	-
t6	5	-	5	-

En lo que respecta a la distribución de productos y la atención de las demandas, se elige mostrar el abastecimiento de una de las sucursales, Resistencia, y sus cercanías. Por cuestiones de espacio, no es posible detallar todas las entregas y las rutas tomadas, pero esta información se encuentra disponible para el lector interesado. Para el caso de la sucursal en Resistencia, el modelo opta por realizar una primera visita en el período

t_2 a través de la ruta $R58$, enviando un total de 183 unidades de 15 productos diferentes mediante el vehículo k_9 , el cual posee una capacidad 40 metros cúbicos; y una segunda visita en el período t_4 a través de la ruta $R59$, con un total de 136 unidades de nuevamente 15 productos distintos, pero utilizando ahora el vehículo k_5 siendo su capacidad 90 metros cúbicos. Se pueden observar ambas rutas en la Figura 2.



Fig. 2. Imagen satelital de las rutas R58 (roja) y R59 (negra) con sus localidades asociadas

En los viajes mencionados a la localidad de Resistencia, también se abastece a otros clientes. En el período t_2 , se visita la localidad de Las Toscas y en el período t_4 la localidad de Qutilipi, donde se entregan 12 y 1 unidades de productos, respectivamente.

5 Conclusiones

En este trabajo se propone una formulación del PIRP alternativa a las de la literatura, que, si bien responde a políticas particulares de una empresa local, es fácilmente adaptable a otras industrias de diversos sectores. Los modelos fueron desarrollados con el objetivo de minimizar el costo total que conlleva producir, almacenar y distribuir múltiples productos con una flota de vehículos heterogénea a lo largo de una extensa cadena de suministros con diferentes actores.

Precisamente, las particularidades de la cadena de suministro modelada es uno de los principales aportes del trabajo. Empezando por la producción, posee un abanico extenso de diferentes productos agrupados en familias, las cuales están limitadas en su capacidad de producción. Desde la perspectiva del inventario, por un lado, se tienen las sucursales, que concentran una gran porción de la demanda y que por ello han sido

dotadas de la capacidad de mantener inventario, el cual debe respetar en todo momento sus niveles de seguridad. Por el otro, se discriminan los clientes finales en prioritarios, sobre los cuales no es posible incurrir en *backorder* en ningún momento.

La formulación se destaca además por su capacidad de obtener soluciones cercanas a valores óptimos muy rápidamente. Esto permite, a quien lo utilice, evaluar múltiples escenarios en poco tiempo, como podría ser una modificación en la composición de la flota de vehículos, en las capacidades de producción, en la demanda, etc.

Los resultados muestran que, para un ejemplo concreto de la industria, es posible organizar en tan solo minutos todas las tareas fundamentales de la cadena de suministros para una semana laboral completa al mínimo costo. Esto valida el enfoque como una herramienta potente para guiar la toma de decisiones de producción, inventario y distribución.

En lo que respecta a posibles trabajos futuros, un camino a explorar es desarrollar una estrategia de solución en donde se concatenen ambas formulaciones mediante un proceso iterativo para reducir al mínimo el gap que genera la estimación del costo de transporte en la formulación PIRP con la solución óptima real del problema.

También es posible extender la presente formulación para contemplar las tareas de distribución que cada sucursal debe realizar ya que, una vez entregados los productos a la misma desde la fábrica, esta debe atender a sus clientes para finalizar con los compromisos pactados. De esta manera, se cubriría una importante porción de la cadena de suministros que hasta el momento no ha sido contemplada.

Otras opciones pueden ser la incorporación de ciertas condiciones a fin de incrementar la fidelidad del modelo con la realidad. Algunas alternativas son:

- Dada la distancia que existe entre la fábrica y ciertas localidades, algunos viajes requerirían más de un día en completarse, reduciendo así la disponibilidad de vehículos para el día siguiente (y requiriendo viajar con más antelación también para cumplir con las demandas);
- Si bien el modelo puede optar por mantener en *backorder* una serie de productos demandados por un cliente, estos deben atenderse en algún momento, por lo que de alguna manera debe garantizarse que eventualmente toda demanda es satisfecha pasado cierto tiempo.

Referencias

1. Chandra, P., & Fisher, M. L.: Coordination of production and distribution planning. *European journal of operational research*, **72**(3), 503-517 (1994)
2. Archetti, C., & Speranza, M. G.: The inventory routing problem: the value of integration. *International Transactions in Operational Research*, **23**(3), 393-407 (2016)
3. hong Zhao, Q., Chen, S., Leung, S. C., & Lai, K. K.: Integration of inventory and transportation decisions in a logistics system. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, **46**(6), 913-925 (2010)
4. Bard, J. F., & Nananukul, N.: A branch-and-price algorithm for an integrated production and inventory routing problem. *Computers & Operations Research*, **37**(12), 2202-2217 (2010)
5. Fumero, F., & Vercellis, C.: Synchronized development of production, inventory, and distribution schedules. *Transportation science*, **33**(3), 330-340 (1999)

6. Solyali, O., & Süral, H.: A relaxation-based solution approach for the inventory control and vehicle routing problem in vendor managed systems. En *Modeling, computation and Optimization*, pp. 171-189 (2009)
7. Adulyasak, Y., Cordeau, J. F., & Jans, R.: Formulations and branch-and-cut algorithms for multivehicle production and inventory routing problems. *INFORMS Journal on Computing*, **26**(1), 103-120 (2014)
8. Archetti, C., Bertazzi, L., Paletta, G., & Speranza, M. G.: Analysis of the maximum level policy in a production-distribution system. *Computers & Operations Research*, **38**(12), 1731-1746 (2011)
9. Adulyasak, Y., Cordeau, J. F., & Jans, R.: Optimization-based adaptive large neighborhood search for the production routing problem. *Transportation Science*, **48**(1), 20-45 (2014)
10. Armentano, V. A., Shiguemoto, A. L., & Løkketangen, A.: Tabu search with path relinking for an integrated production-distribution problem. *Computers & Operations Research*, **38**(8), 1199-1209 (2011)
11. Boudia, M., Louly, M. A. O., & Prins, C.: A reactive GRASP and path relinking for a combined production-distribution problem. *Computers & Operations Research*, **34**(11), 3402-3419 (2007)
12. Boudia, M., & Prins, C.: A memetic algorithm with dynamic population management for an integrated production-distribution problem. *European Journal of Operational Research*, **195**(3), 703-715 (2009)
13. Chan, F. T., Wang, Z. X., Goswami, A., Singhanian, A., & Tiwari, M. K.: Multi-objective particle swarm optimisation based integrated production inventory routing planning for efficient perishable food logistics operations. *International Journal of Production Research*, **58**(17), 5155-5174 (2020)
14. Absi, N., Archetti, C., Dauzère-Pérès, S., & Feillet, D. A two-phase iterative heuristic approach for the production routing problem. *Transportation Science*, **49**(4), 784-795 (2015)
15. Absi, N., Archetti, C., Dauzère-Pérès, S., Feillet, D., & Speranza, M. G.: Comparing sequential and integrated approaches for the production routing problem. *European Journal of Operational Research*, **269**(2), 633-646 (2018)
16. Solyali, O., & Süral, H.: A multi-phase heuristic for the production routing problem. *Computers & Operations Research*, **87**, 114-124 (2017)
17. Avci, M., & Yildiz, S. T.: A mathematical programming-based heuristic for the production routing problem with transshipments. *Computers & Operations Research*, **123**, 105042 (2020)
18. Hrabec, D., Hvattum, L. M., & Hoff, A.: The value of integrated planning for production, inventory, and routing decisions: A systematic review and meta-analysis. *International Journal of Production Economics*, **248**, 108468 (2022)
19. Brahimi, N., & Aouam, T.: Multi-item production routing problem with backordering: a MILP approach. *International Journal of Production Research*, **54**(4), 1076-1093 (2016)